## EMLÉKEZTETŐ:

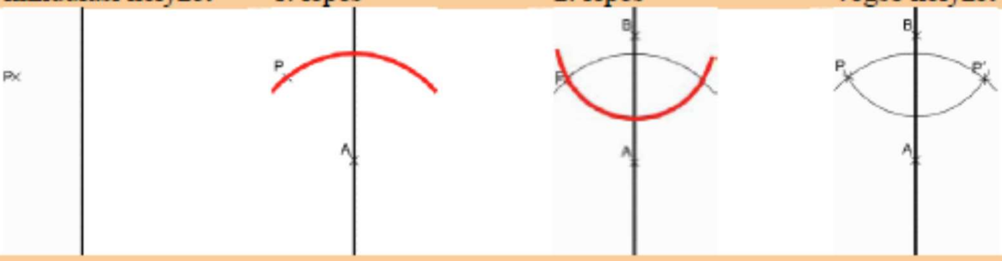
Az olyan hozzárendelést, amely a tér egy pontjához pontot rendel, **geometriai transzformáció**nak nevezzük. Két geometria transzformációval részletesen foglalkoztunk már: a **tengelyes tükrözés**sel és a **középpontos tükrözés**sel.

Ezek távolságtartó és szögtartó geometriai transzformációk. Az ilyeneket **egybevágóságnak** nevezzük.

Egy pont **tengelyes tükörképének** megszerkesztésére kétféle eljárást is megismertünk:

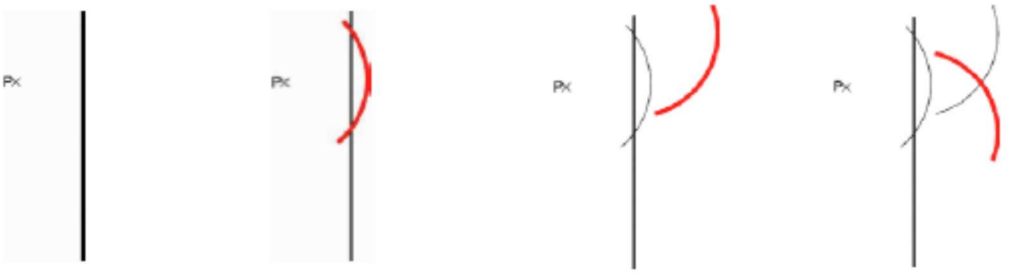
1. A tengely egy tetszőleges pontjába (*A*) szúrva körzőnket az *AP* távolsággal körívet húzunk, a tengely *P*-vel szemközti oldalára. Egy másik tetszőleges tengelyponttal (*B*) ugyancsak elvégezve az előző lépést, a két ív metszéspontja megadja a *P* pont *P'* tükörképét.

kiindulási helyzet | 1. lépés | 2. lépés | végső helyzet




2. A *P* pontból egy körívvel két helyen elmetsszük a tengelyt, majd ugyanezzel a sugárral a két metszéspont, mint középpont köré is egy-egy körívet húzunk. E két ív metszéspontja megadja a *P* pont *P'* tükörképét.

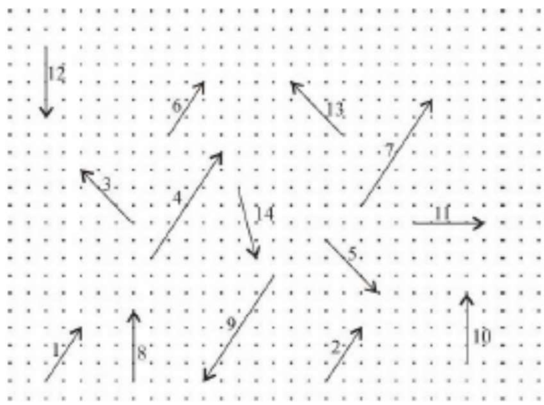
kiindulási helyzet | 1. lépés | 2. lépés | végső helyzet




A **középpontos tükrözés** megadható a következő utasítással: Adott egy *O* pont. Sík pontjai figyelem! Minden pont a lehető legrövidebb úton menjen a megadott ponthoz, és ugyanabba az irányba haladjon tovább ugyanannyit, mint amekkora utat a pontig megtett!

Az utasítás alapján könnyen megszerkeszthetjük egy *P* pont középpontos tükörképét. Kössük össze a *P* pontot az *O*-val és hosszabbítsuk meg ezt az egyenest az *O*-n túl. Ezután az *O* pontból mérjük fel az *OP* távolságot a *P*-vel ellentétes oldalra!

**3.** Válogasd ki azokat a nyilakat, amelyek egyforma eltolást eredményeznek, és színezd őket azonos színnel!




**4.** Döntsd el a következő állításokról, hogy melyik igaz (I), melyik hamis (H)!

**a)** Ha két nyíl párhuzamos, akkor ugyanazt az elmozdulást eredményezik.

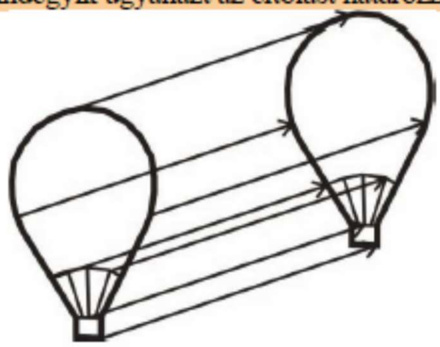
**b)** Ahhoz, hogy ugyanazt a képet kapjuk, az elmozdulást jelentő nyilaknak azonos pontból kell kiindulniuk.

**c)** Úgy is megadhatok egy elmozdulást, hogy a nyíl nem érintkezik az elmozdítandó alakzattal.

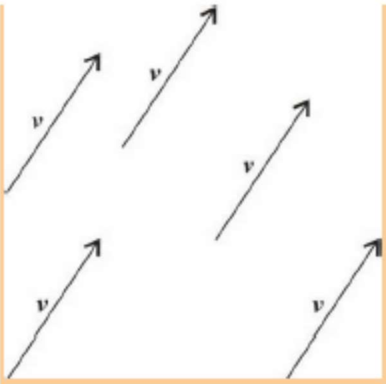
**d)** Két nyíl azonos elmozdulást eredményez, ha párhuzamosak, és egyforma a hosszúságuk.

## TUDNIVALÓ:

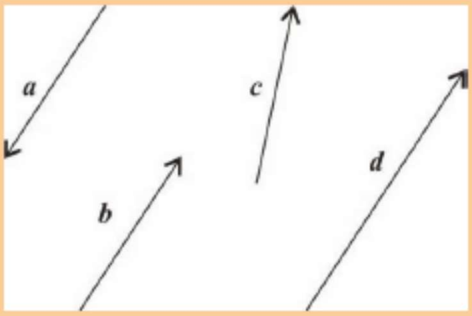
Az **eltolás** olyan geometria transzformáció, hogy bármely pontból a képébe mutató irányított szakaszok egymással párhuzamosak, egyező irányításúak, és egyenlő nagyságúak. Ezek közül elég egyet megadni, mert mindegyik ugyanazt az eltolást határozza meg.



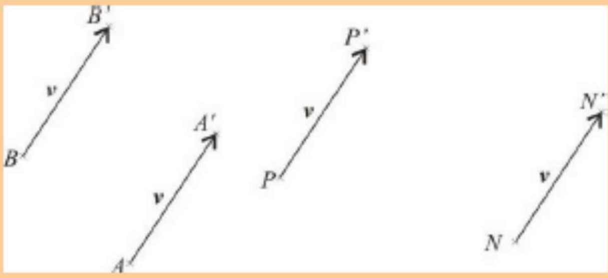
Ha az irányított szakaszoknak csak a nagyságát és az irányát vesszük figyelembe, – azzal nem törődünk, hogy melyik pontból indulnak – akkor azokat **vektor**nak nevezzük.
A vektort nagyságával és irányával jellemezhetjük. A v-vel jelölt vektorok egyenlők, mert nagyságuk egyforma, párhuzamosak és irányuk azonos.




A következő vektorok mindegyike különböző, mert valamely jellemzőjük eltér egymástól.



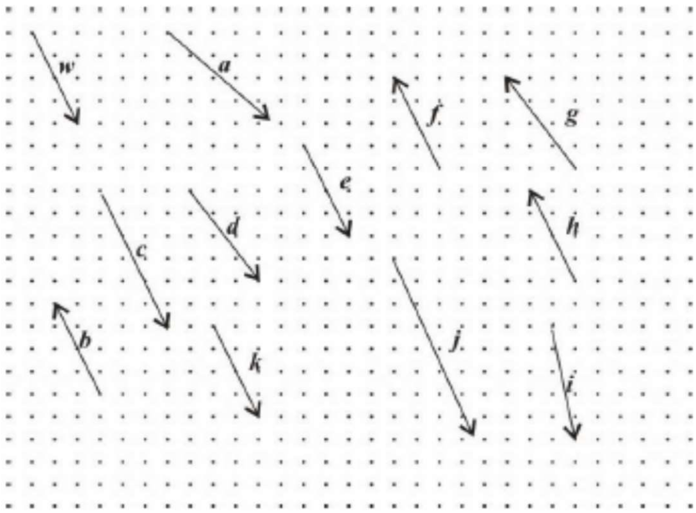

Eltolásnál a sík bármely pontjából a pont képébe mutató vektorok egyenlők.




A vektorokat írásban kétféleképpen jelölhetjük:
- aláhúzott kisbetűvel: $\underline{\mathbf{v}}$
- a kezdő és végpontot megadva, nyíllal jelölve: $\overrightarrow{AB}$

# 3. FELADATLAP

**1.** Keress a $\underline{w}$ vektorral párhuzamos vektorokat. Színezd pirosra azokat, amelyek egyenlők vele, kékre pedig azokat, amelyek párhuzamosak, azonos nagyságúak, de nem egyenlők vele! (Az ilyen vektort a $\underline{w}$ ellentettjének nevezzük)




**2.**

**a)** Rajzold meg a koordinátarendszerben azt a vektort, melynek kezdőpontja az $A(4; -1)$ végpontja pedig a $B(-2; 2)$ koordinátájú pont!

**b)** Rajzolj az $\overline{AB}$ vektorral egyenlő vektorokat! Hol lesz annak a végpontja, mely az origóból indul ki?

**3.** Rajzold fel ismét az előző feladat $\overline{AB}$ vektorát egy új koordinátarendszerbe!

**a)** Rajzolj olyan vektorokat, amelyek ellentétes irányúak, de egyforma hosszúak vele!

**b)** Rajzolj olyan vektort, amelyiknek az origóban van a kezdőpontja, és az $\overline{AB}$ vektorral azonos hosszúságú, de ellentétes irányú.

**4.** Rajzolj egy háromszöget egy új koordinátarendszerbe.

**a)** Told el a háromszöget az $\overline{AB}$ vektorral!

**b)** Az a) feladatban kapott háromszöget told el az $\overline{AB}$ vektor ellentettjével!

**c)** Mit tapasztalsz?

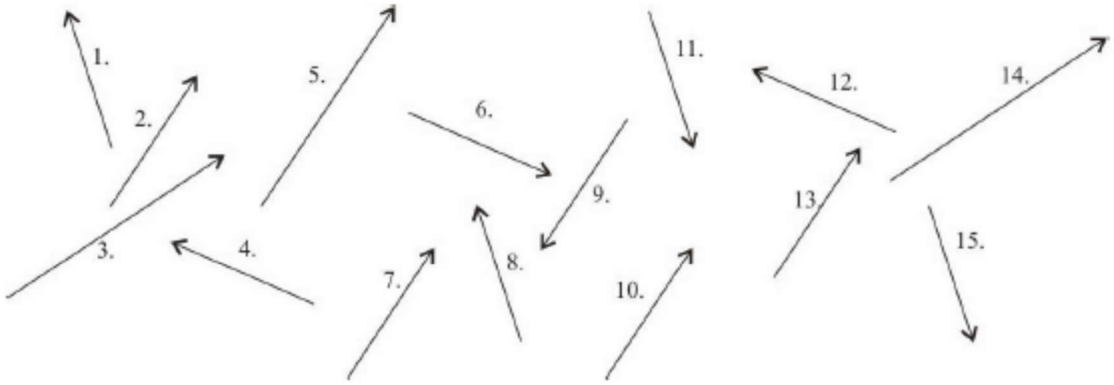
## TUDNIVALÓ:

Az olyan vektorokat, melyek párhuzamosak, azonos nagyságúak, de ellentétes irányúak **ellentett** vektoroknak nevezzük.

Ha egy alakzatot eltolunk egy vektorral majd az ellentettjével, akkor visszajutunk az eredeti alakzathoz. Ilyenkor azt is mondhatjuk, hogy egy olyan vektorral toltuk el, melynek hosszúsága nulla. Az ilyen vektort **nullvektor**nak nevezzük. A nullvektor tetszőleges irányú, nulla hosszúságú vektor.

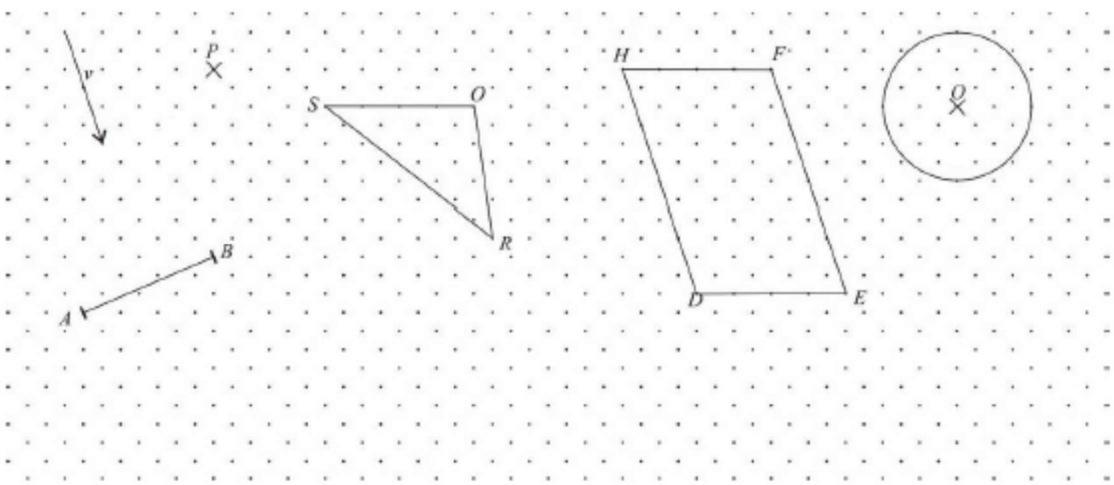
# 4. FELADATLAP

**1. a)** Színezd az azonos vektorokat egyforma színnel!




**b)** Válassz ki olyan párokat, amelyek ellentettjei egymásnak!

**2.** Told el az alakzatokat a megadott vektorral! Válassz ki mindegyiken 3-3pontot, és jelöld meg, hogy honnan hová került!




**3.** Told el a deltoidot egymás után a megadott vektorokkal. Mindig az előző eltolás után kapott képet told tovább. Mielőtt hozzákezdenél a rajzoláshoz, beszéljétek meg a csoporton belül, hogy mindenki más sorrendben végezze az eltolásokat.

## TUDNIVALÓ:

**Az eltolás tulajdonságai:**

– Bármely szakasz és eltolt képe azonos hosszúságú
– Szög és eltolt képe egyenlő nagyságú
– Bármely alakzat és képe egybevágó
– Alakzat és képe azonos körüljárási irányú
– Egyenes és eltolt képe párhuzamos vagy egybeesik
– Bármely félegyenes és képe egyállású

## 7. FELADATLAP

**1.** Ábrázold koordinátarendszerben az $A$ (2; 2), $B$(6; 2), $C$(6; 6), $D$(2; 6) pontokat. Milyen négyszöget kaptál?

**a)** Told el úgy a kapott négyszöget, hogy a $B$ csúcsa a $B'$(–1; –2) pontba kerüljön!

**b)** Add meg az eltolt pontok koordinátáit!

**c)** Hol lesz az eltolás vektorának a végpontja, ha kezdőpontja az origó?

**2.** Ábrázold koordinátarendszerben az A (–7; 2), B(–1; 2), C(–2; 6), D(–4; 6) pontokat. Milyen négyszöget kaptál?

**a)** Told el úgy a négyszöget, hogy a B pont a B'(1; 2) pontba kerüljön! A képet rajzold pirossal.

**b)** Olvasd le az eltolt négyszög csúcsának koordinátáit. Mit tapasztalsz?

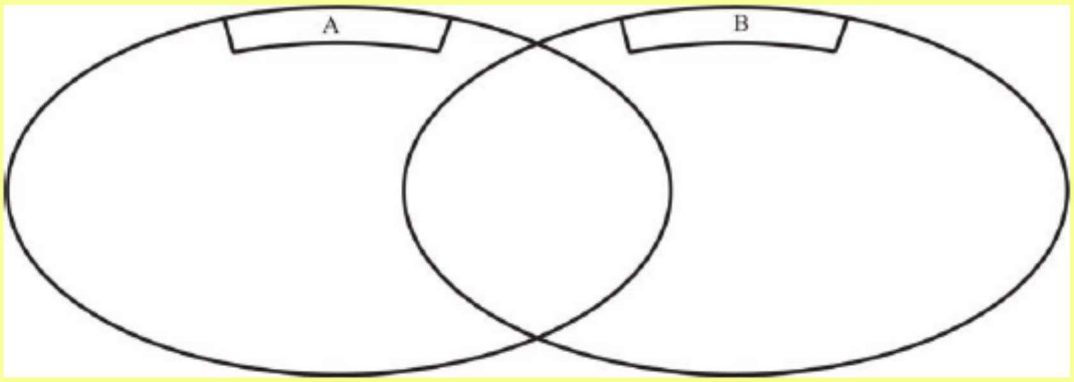
**c)** Tükrözd az eredeti négyszöget az y tengelyre! A képet rajzold kékkel.

**d)** Olvasd le a csúcsok koordinátáit! Mit tapasztalsz?

**e)** Tükrözd a négyszöget az origóra, a képet zölddel rajzold!

**f)** Olvasd le a középpontosan tükrözött négyszög csúcsának koordinátáit! Mit tapasztalsz?

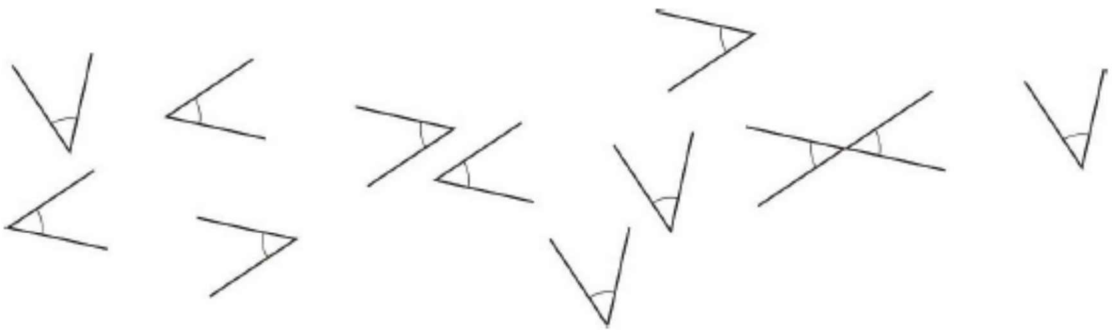
**3. a)** Írd a halmazábra megfelelő helyre a tulajdonságokat! A címkék jelentése A: az eltolás tulajdonságai, B: a középpontos tükrözés tulajdonságai.



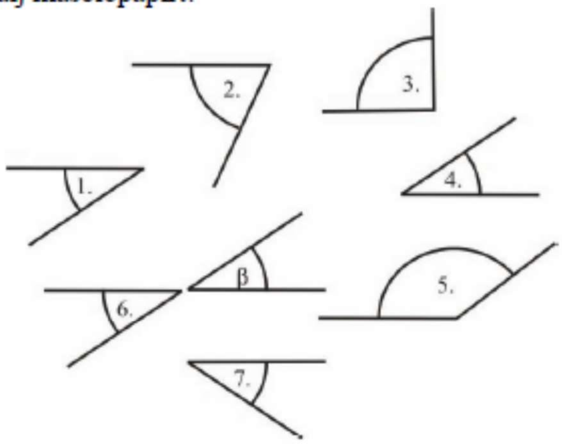

**b)** Rajzolj Venn-diagramot, és írd bele az eltolás és a tengelyes tükrözés tulajdonságait!

# 8. FELADATLAP

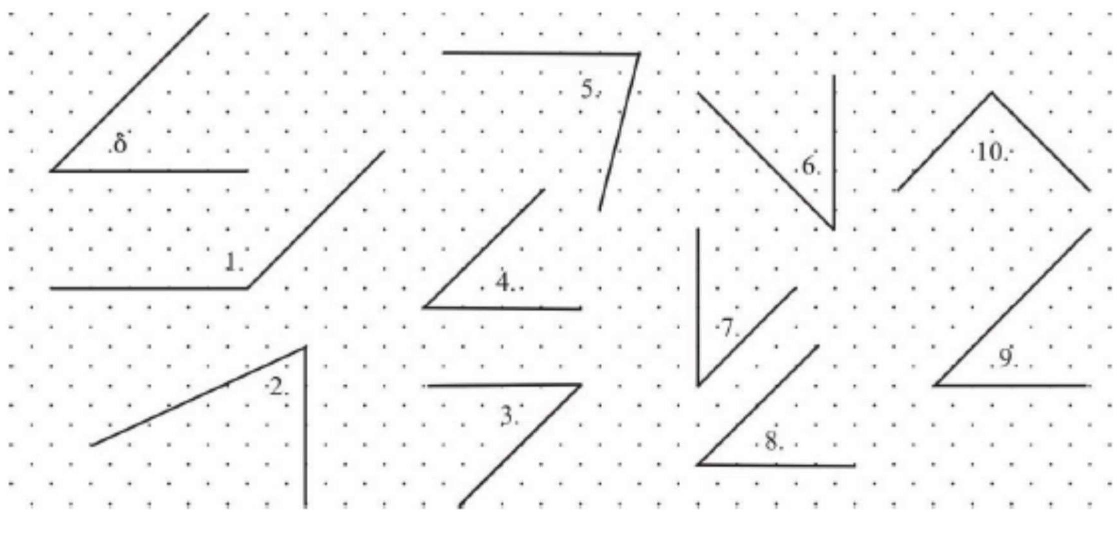
**1.** A képen egyforma nagyságú szögeket látsz. Keress közöttük olyanokat, melyek eltolással egymásba vihetők. Színezd őket azonos színnel!



**2.** A rajz közepén van egy $\beta$-val jelzett szög. Keress vele azonos nagyságú szögeket a számmal jelöltek között! Milyen geometriai transzformációval lehet megkapni őket a $\beta$ szögből? Ha kell, használj másolópapírt!




**3.** Karikázd be azokat a szögeket, amelyeknek mindkét szára párhuzamos a $\delta$ szög száraival! Színezd pirosra azokat, amelyek megkaphatók a $\delta$ szög eltolásával!



**4.** Egészítsd ki a hiányos szöveget az előző feladatok tapasztalata alapján!

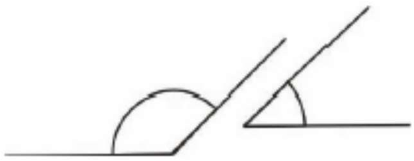
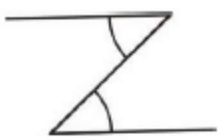
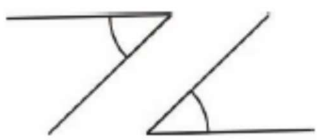
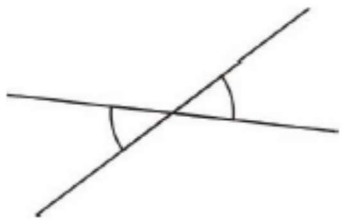
Ha egy szög egy másikból eltolással megkapható, akkor a két szög nagysága ____________________________, az ilyen szögeket **egyállású** szögeknek nevezzük.

Ha két szög szárai páronként párhuzamosak egymással akkor a két szög nagysága vagy ________________________________, vagy ____________________________.

Ha két szög egymásnak középpontos tükörképe, akkor száraik páronként ________________________________, az ilyen szögek nagysága ___________________. Az ilyen szögeket **fordított állású** szögeknek nevezzük.

**5.** Válaszd ki, hogy melyik ábra illik az egyes szövegekhez!

| |
|---|
| **A**<br><br>Az olyan szögeket, melyek szárai fordított állású félegyenesek, **fordított állású** szögeknek nevezzük.<br><br>**A fordított állású szögek egyenlők.** |
| **B**<br><br>Ha a fordított állású szögpár mindkét szára egybe esik, tehát közös a csúcspontjuk, akkor **csúcsszögnek** nevezzük őket.<br>**A csúcsszögek nagysága egyenlő.** |
| **C**<br><br>Az olyan szögeket, melyek szárai egyállású félegyenesek, **egyállású szögeknek** nevezzük.<br><br>**Az egyállású szögek egyenlők.** |
| **D**<br><br>Ha a fordított állású szögpár egyik szára egybeesik, akkor **váltószögeknek** nevezzük őket.<br><br>**A váltószögek egyenlő nagyságúak.** |

| |
|---|
| **1.**<br> |
| **2.**<br> |
| **3.**<br> |
| **4.**<br> |